В.А. Далингер
Омский государственный педагогический университет

Когнитивно-визуальный подход и его особенности в обучении математике

13.00.02 – теория и методика обучения и воспитания (математика)

А В статье рассмотрены возможности обучения математике на основе создания наглядных образов и оперирования ими, приведены примеры решения задач на основе явного и неявного использования наглядного образа, предложены задачи для самостоятельной работы, решение которых основано на использовании познавательной функции наглядности.

Система образования поставлена перед проблемой совершенствования её содержания, поиска новых форм, методов и средств обучения, а также специфичных приёмов их использования в учебном процессе. Одним из таких средств обучения является наглядность, образовательное значение которой достаточно велико и отвечает современным требованиям. Особое значение приобретает проблема реализации принципа наглядности на основе развития и использования резервов визуального мышления учащихся, которое выделено сегодня одним из приоритетных направлений развивающей функции математики.

Анализ школьной практики обучения учащихся математике показывает, что основной упор учителя делают на логическое мышление, т. е. на работу левого полушария головного мозга: иначе говоря, в обучении имеет место «левополушарный крен». По исследованиям же психологов известно, что до 80 % информации человек получает через зрительный канал. Что же касается математики, то уместно привести здесь слова великого К. Гаусса: «Математика – наука не столько для ушей, сколько для глаз».

Психологами и физиологами доказано, что левое полушарие специализируется на вербально-символических функциях, а правое – на пространственно-синтетических.

В работе учителя математики больший акцент делается на использовании формально-логических средств, на оперирование знаковыми системами без необходимой опоры на образные компоненты.

Итак, встаёт проблема: «Как сделать обучение математике таким, чтобы оно строилось на сбалансированной работе и левого, и правого полушарий головного мозга, т. е. на разумном сочетании логического и наглядно-образного мышления?»

В настоящее время широкое распространение получил термин «визуальное мышление», т. е. зрительно-наглядное, означающее, как пишет Р. Артхейм, «мышление посредством визуальных (зрительных) операций» [1].

Визуальное мышление есть деятельность, обеспечивающая создание образов, оперирование ими, перекодирование их в заданном или произвольном направлении, использование разных систем отсчета для построения образа, выявление в образе различных признаков и свойств объекта, значимых для человека.

В.П. Зинченко и Н.Ю. Вергилес так определяют понятие визуального мышления: «Визуальное мышление – это человеческая деятельность, продуктом которой является порождение новых образов, создание новых визуальных форм, несущих определённую смысловую нагрузку и делающих знание видимым» [2, с. 17].

Мы предлагаем строить процесс обучения математике на основе когнитивно-визуального (зрительно-познавательного) подхода к формированию знаний, умений и навыков, что позволяет максимально использовать потенциальные возможности визуального мышления. Одно из центральных положений данного подхода – широкое и целенаправленное использование познавательной функции наглядности. Реализация когнитивно-визуального подхода в процессе обучения учащихся математике позволяет сконструировать визуальную учебную среду – совокупность условий обучения, в которых акцент ставится на использовании резервов визуального мышления учащихся. Эти условия предполагают наличие как традиционных наглядных средств, так и специальных средств и приёмов, активизирующих работу органов зрения.

Одним из достоинств когнитивно-визуального подхода является то, что он учитывает индивидуальные особенности учащихся и, в частности, особенности работы левого и правого полушарий головного мозга. Сегодня вопрос о функциональной асимметрии полушарий головного мозга и особенно учёт этой асимметрии в практике обучения математике становится всё более актуальным.

Открытие в 1981 г. американским неврологом Р. Сперри функциональной асимметрии головного мозга привело к необходимости переоценки и корректировки устоявшихся взглядов на систему математического образования в направлении развития образного мышления учащихся.

Обучение математике должно в равной степени использовать качественно различные сферы человеческого мышления. А.Г. Мордкович формулирует два лозунга, относящихся ко всей школьной математике: «Меньше схоластики, меньше формализма, меньше жёстких моделей, меньше опоры на левое полушарие мозга! Больше геометрических иллюстраций, больше наглядности, больше правдоподобных рассуждений, больше мягких моделей, больше опоры на правое полушарие головного мозга!» [3, с. 4].

Современные психолого-педагогические исследования [4; 5; 6; 7] проблемы формирования и развития визуального мышления учащихся концентрируются вокруг следующих вопросов: операции и закономерности невербального мышления; проблемы зрительного восприятия; механизмы и характеристические особенности визуального мышления; динамика формирования математического образа; проблемы передачи информации и распознавания образа; психофизиологические механизмы восприятия информации доминантным и субдоминантным полушариями головного мозга и т. д.

Основой принципа визуализации служит когнитивная графика, цель которой состоит в создании комбинированных когнитивных моделей представления знаний, которые сочетают в себе символический и геометрический способы мышления и способствуют активизации процессов познания. Но использование визуальной информации не должно приводить к другой крайности – «правополушарному крену», следует также использовать вербальную информацию; оптимальным является разумное сочетание обоих способов представления информации в процессе обучения и визуальный, и вербальный.

Наглядность играет в процессе обучения непосредственные и опосредованные функции. К непосредственным функциям относятся: познавательная, управление деятельностью учащихся, интерпретационная, эстетическая, непосредственности рассуждений. К опосредованным функциям следует отнести такие: обеспечение целенаправленного внимания учащихся, запоминания и повторения учащимися учебного материала, реализация прикладной направленности.

М.И. Башмаков и Н.А. Резник по поводу используемой на уроке наглядности отмечают: «Каждый учитель использует на уроке наглядный материал – формулы и чертежи на доске, рисунки и схемы на экране, плакаты и таблицы на стенах, модели и образцы в руках у учеников. Первая цель учителя состоит в том, чтобы ученик смотрел на предъявляемые ему зрительные образы. Этой цели достичь легко. Вторая цель состоит в том, чтобы ученик смотрел и видел то, что заложено в этих образах. Культура зрительного восприятия требует такого же длительного и серьёзного воспитания, как культура письма и речи» [8, с . 9].

Попытки визуализировать математику, сделать её более наглядной, предпринимались уже давно. Ещё древние математики пытались самые элементарные алгебраические тождества и теоремы представлять в геометрическом виде. Позже сторонниками разумной визуализации математики выступали такие выдающиеся учёные, как Леонард Эйлер, Бернхард Риман, Давид Гильберт.

Без наглядных образов знания учащихся становятся бессодержательными, и это приводит к формализму. Вообще следует подчеркнуть, что там, где можно дать тому или иному математическому объекту наглядную интерпретацию, это следует делать в обязательном порядке.

Проблема реализации принципа наглядности в обучении математике может получить принципиально новое решение, если удастся найти такое методическое обеспечение деятельности ученика, которое позволит включать функции его визуального мышления для получения продуктивных результатов в овладении математическими понятиями, способами деятельности, для усиления развивающей функции наглядности.

Дидактически выверенное использование наглядных образов в обучении математике может превратить наглядность из вспомогательного, иллюстрирующего средства, в ведущее, продуктивное методическое средство, способствующее математическому развитию учащихся.

Язык образов является основным средством наглядности при изучении абстрактных математических понятий, позволяющих осознанно оперировать понятиями и умозаключениями, закреплять и «оживлять» их в памяти.

В обучении наглядные образы выполняют важные функции: приобретение, хранение и репродуцирование информации; создание упреждающей программы поведения; эталонная функция; регулирование действий и т. д.

И.С. Якиманской [9] разработаны следующие показатели, определяющие уровень оперирования учащимися образами: широта оперирования образом, полнота образа, его обобщённость и динамичность.

Главная идея когнитивно-визуального подхода к формированию знаний, умений и навыков в процессе обучения математике – широкое и целенаправленное использование познавательной функции наглядности. Когнитивно-визуальный подход направлен на воспитание «математического зрения». Для накопления визуального опыта полезны специальные задачи – визуализированные.

Визуализированной назовём задачу, в которой образ явно или неявно задействован в условии, ответе, задаёт метод решения задачи, создаёт опору каждому этапу решения задачи либо явно или неявно сопутствует на определенных этапах её решения [10; 11].

Визуализированные задачи позволяют передать информацию об учебных возможностях, определённых особенностях умственной деятельности учащихся и тем самым служат инструментарием для диагностики учебных и личностно значимых качеств, а также являются одними из основных инструментов реализации когнитивно-визуального подхода к обучению математике.

Визуальный поиск – это процесс порождения новых образов, новых визуальных форм, несущих конкретную визуально-логическую нагрузку и делающих видимым значение искомого объекта или его свойства. Исходной позицией такого процесса является запас готовых, известных учащемуся визуальных образов, структура и элементы информации, визуально обозримые связи между ними. Визуализированные задачи служат средством формирования навыков визуального поиска.

В решении математических задач образ может использоваться либо явно, либо неявно, но и в том, и в другом случае это приводит к поиску пути решения задачи. Ниже мы приведём примеры неявного и явного использования наглядного образа при решении математических задач.

I. Неявное использование наглядного образа

1) При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} 7ax + 4y = -8, \\ x + 7ay = 49a^2 \end{cases}$ имеет более двух решений.

Решение задачи облегчается, если в каждом из уравнений системы увидеть прямую. В данном случае образ прямой используется нами неявно (прямые не строятся). Две прямые могут пересекаться (одно решение), быть параллельными (ни одного решения), совпадать (бесконечное множество решений – это как раз то, о чём спрашивается в задаче).

Преобразуем систему:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{7a}{4}x - \dfrac{8}{4}, \\ y = -\dfrac{1}{7a}x - \dfrac{49a^2}{7a}. \end{cases}$$

Прямые совпадают, если равны их угловые коэффициенты и равны свободные члены, тем самым имеем такую систему:

$$\begin{cases} -\dfrac{7a}{4} = -\dfrac{1}{7a}, \\ \dfrac{49a^2}{7a} = -\dfrac{8}{4}. \end{cases}$$

Решая систему, получаем ответ к задаче: $a = -\dfrac{2}{7}$.

2) Решите уравнение $|x+7| + |x-3| = 10$.

Традиционное решение выглядит так: числовая прямая точками $x = -7$ и $x = 3$ разбивается на три промежутка, на каждом из которых затем решается уравнение.

Используя неявно образ расстояния (а модуль это и есть расстояние между двумя точками), решающий может рассуждать так: «От меня требуют найти такие значения x, сумма расстояний от которых до точек $x = -7$ и $x = 3$ равна 10. Ясно, что это лишь значения x, принадлежащие отрезку [–7; 3]». Это утверждение можно продемонстрировать (рис. 1).

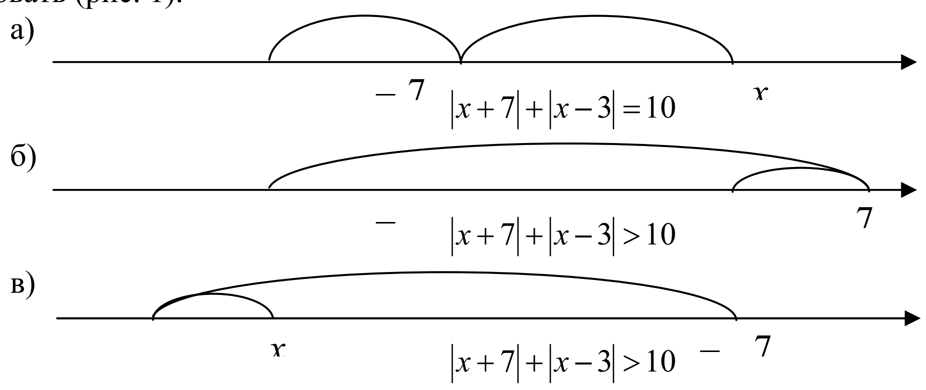

Рис. 1

Рассмотрим примеры задач, решение которых значительно облегчается за счёт явного использования соответствующего образа. Этот образ (график, рисунок, чертёж и т. п.) позволяет считывать информацию, тем самым обеспечивает наглядности познавательную функцию (в отличие от иллюстративной).

II. Явное использование наглядного образа

1) Доказать тождество $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Читателю известно доказательство тождества с помощью производной. Мы же воспользуемся образом слагаемых, стоящих в левой и правой частях тождества: arcsin *x* – это угол, синус которого равен *x*, а arccos *x* – это угол, косинус которого равен *x*; знак суммы означает сложение двух углов; в правой части тождества $\frac{\pi}{2}$ означает величину прямого угла. Тем самым мы выходим на рис. 2. Имеем: $\frac{x}{1} = \sin\angle A$, $\frac{x}{1} = \cos\angle B$. Из этих равенств получаем: $\angle A = \arcsin x$, $\angle B = \arccos x$, а так как треугольник прямоугольный и, используя теорему о сумме углов треугольника, окончательно получаем $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

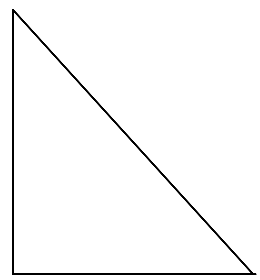

Рис. 2

2) Доказать тождество $\mathrm{arctg}\frac{1}{2} + \mathrm{arctg}\frac{1}{3} = 45°$.

Это тождество доказывает рис. 3.

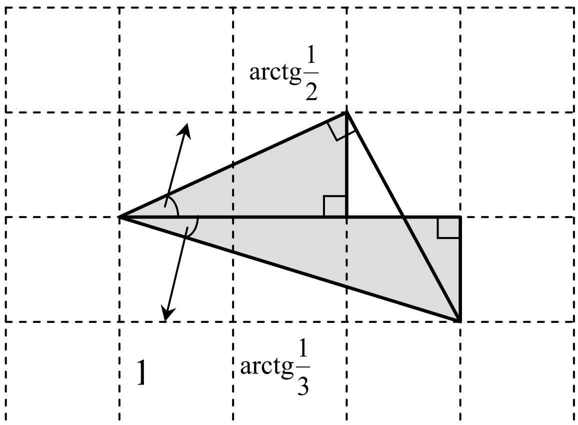

Рис. 3

Треугольник *ACB* прямоугольный и равнобедренный (читателю предоставляется возможность доказать эти два факта). Из этого следует, что углы при основании ΔABC равны по 45°. Следовательно, мы доказали тождество $\mathrm{arctg}\frac{1}{2} + \mathrm{arctg}\frac{1}{3} = 45°$, используя явно образы углов и суммы углов.

3) Пусть имеются функция *y=f(x)* и ей обратная функция $x = \varphi(y)$, и пусть $f(0)=0$. Докажите неравенство: $\int_0^a f(x)dx + \int_0^b g(y)dy \geq ab$.

Из рис. 4 видно, что $\int_0^a f(x)dx = S_{OCD}$; $\int_0^b \varphi(y)dy = S_{OAB}$; $S_{OAKD} = ab$.

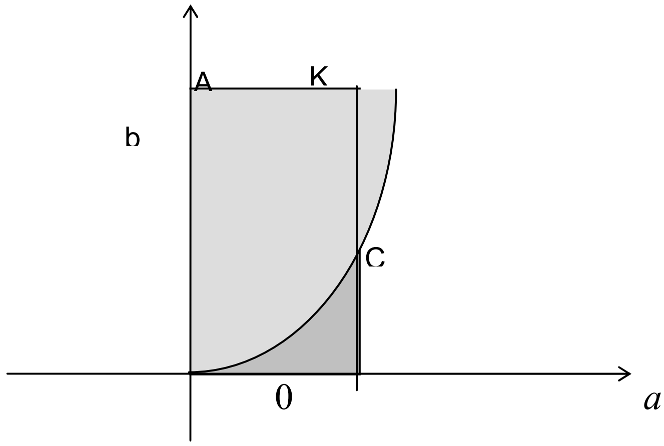

Рис. 4

Геометрический образ позволяет заключить, что $\int_0^a f(x)dx + \int_0^b g(y)dy \geq ab$.

Заметим, что эта формула верна для любой пары взаимообратных функций.

4) Докажите, что площадь правильного восьмиугольника равна произведению наибольшей и наименьшей из его диагоналей.

Доказательство.

Проведём оси симметрии заданного правильного восьмиугольника AA_1 и CC_1 (рис. 5). Проведём также $EK \perp AA_1$ и $KD \perp CC_1$. Тогда EK равна наименьшей диагонали восьмиугольника, а KD – наибольшей.

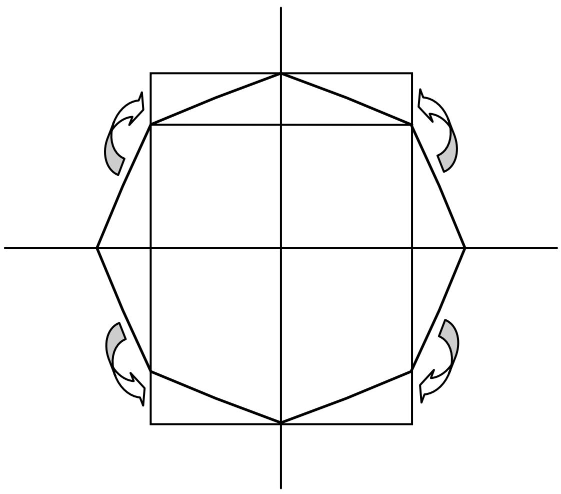

Рис. 5

Путём перекладывания треугольников, указанным на рисунке способом, получаем, что $S_{ABCFA_1PC_1N} = S_{EKDT} = EK \cdot DT$. Это и доказывает утверждение, содержащееся в задаче.

Замечание: Указанное в доказательстве перекладывание треугольников возможно, если соответствующие треугольники равны (в силу симметрии достаточно показать это для одной пары треугольников). Предоставляем читателю возможность доказать самостоятельно, что $\Delta AKB = \Delta BCR$.

Предложим задачи для самостоятельного решения.

1) Какое из чисел больше, $\frac{2}{201}$ или $\ln\frac{101}{100}$? (Указание: воспользуйтесь графиком функции $y = \ln x$).

2) Доказать неравенства:

а) $99 < \int\limits_1^{100} \lg x dx < 198$; б) $3 < \int\limits_1^4 \log_2 x dx < 6$; в) $0 < \int\limits_{\frac{1}{3}}^1 \log_{\frac{1}{3}} x dx < \frac{1}{3}$. (Указание: воспользуйтесь геометрическим смыслом определённого интеграла.)

3) Табличное значение для интеграла $\int\limits_0^1 e^{x^2} dx$ равно $\approx 1{,}463$. Найдите значение интеграла $\int\limits_1^e \sqrt{\ln z} dz$. (Указание: воспользуйтесь соответствующим графиком и геометрическим смыслом определенного интеграла.)

4) Докажите, что если $0 < a < b$ и функция $f(x)$ непрерывна, монотонна и $f(x) > 0$, то имеет место равенство

$$\int\limits_a^b f(x) dx = b \cdot f(b) - a \cdot f(a) - \int\limits_{f(a)}^{f(b)} \varphi(y) dy,$$

где $\varphi(y)$ – функция, обратная для функции $y = f(x)$. (Указание: воспользуйтесь геометрическим смыслом определенного интеграла).

5) Используя результаты предыдущей задачи, вычислите следующие интегралы:

а) $\int\limits_2^8 \log_2 x dx$; г) $\int\limits_2^4 \arcsin\sqrt{\frac{1}{x}} dx$;

б) $\int\limits_1^{-1} \arccos dx$; д) $\int\limits_0^1 \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) dx$;

в) $\int\limits_0^1 \arcsin dx$; е) $\int\limits_3^4 \sqrt{\frac{1}{x-1}} dx$;

7) Решите уравнения:

а) $|x - 11| + |x - 3| = 14$;

б) $|x + 8| + |x + 9| = 17$;

в) $|3x - 8| + |3x - 4| = 12$.

(Указание: используйте геометрический смысл модуля.)

Читатель, заинтересовавшийся поднятой в статье темой, найдёт для себя ответы на многие вопросы в указанной ниже литературе.

Библиография

1. Arnheim R. Visual thinking. Berkley: Univ. of California Press, 1969.
2. Зинченко В.П., Вергилес Н.Ю. Формирование зрительного образа. Исследование деятельности зрительной системы. М.: Изд-во МГУ, 1969.
3. Мордкович А.Г. Методические проблемы изучения элементов математического анализа в общеобразовательной школе // Математика в школе. 2002. №9. С. 2-12.
4. Болтянский В.Г. Как развивать «графическое мышление» // Математика в школе. 1978. № 3.

5. Захаров А.И. Неврозы у детей. СПб.: Дельта, 1996.
6. Резник Н.А. Технология визуального мышления // Информационная среда обучения. СПб.: Свет, 1997.
7. Чошанов М.А. Визуальная математика. Казань: Абак, 1997.
8. Башмаков М.И., Резник Н.А. Развитие визуального мышления на уроках математики // Математика в школе. 1991. № 1.
9. Якиманская И.С. Образное мышление и его место в обучении // Советская педагогика. 1968. № 12.
10. Далингер В.А. Формирование визуального мышления у учащихся в процессе обучения математике: Учебное пособие. Омск: Изд-во ОмГПУ, 1999.
11. Князева О.О. Визуализированные задачи и методика их использования в процессе обучения началам математического анализа: Учебное пособие. Омск: Изд-во ОмГПУ, 2003.